

順-逆時間シミュレーションを用いた雲のアニメーション

Forward and Backward Simulation for Cloud Animation

Yonghao Yue¹ 岩崎 慶² 陳 炳宇³ 土橋 宜典⁴ 西田 友是¹
¹東京大学 ²和歌山大学 ³國立臺灣大學 ⁴北海道大学

Yonghao Yue¹ Kei Iwasaki² Bing-Yu Chen³ Yoshinori Dobashi⁴ Tomoyuki Nishita¹
¹The University of Tokyo ²Wakayama University ³National Taiwan University ⁴Hokkaido University

概要

屋外シーンのレンダリングにおいて、写実的な雲のアニメーションを生成することは重要であるが、印象深く迫力のある雲の動きを撮影することは条件が厳しく難しい。本研究では、任意の雲の初期形状と目的形状を入力として、その間のアニメーションを補間するシステムの構築を目指す。本稿では、時間的に可逆的なシミュレータを導入し、順時間シミュレーションと同等の計算コストで逆時間シミュレーションを行う手法を提案する。雲のアニメーションは逆時間シミュレーションで得られた結果を逆再生することによって得られる。日中の雲の変化といった長いタイムスパンで、かつ高い解像度が必要とされるシミュレーションへの応用について検討する。

1. はじめに

雲のアニメーションはコンピュータグラフィックス(CG)における重要な研究テーマの一つであり、写実的な屋外シーンのレンダリングでは欠かすことができない。また、夕日に映る彩雲や、青く抜ける空に浮かぶ白い雲などのように、雲のアニメーションは印象的な映像を製作する上で重要となる。雲のアニメーションは、日中の雲の動きをカメラで撮影するか、流体シミュレーションを行うことによって得られる。しかし、雲の動きは季節の変化とともに毎日異なり、非常に印象的な雲の動きは極めて限定された条件下でしか撮影できないことが多い。これに対して、印象的な雲の写真の撮影はより簡単であり、写真集やインターネットなどに様々な画像を見つけることができる。

本研究では、任意の雲の初期形状と目的形状を入力として、その間のアニメーションを補間するシステムの構築を目指す(図1)。たとえば異なる日に撮影された昼間の雲の画像と夕日の画像を入力として、アニメーションを生成することが考えられる。この目的を実現するため、流体シミュレーションを利用することを考える。しかし、通常のシミュレーションでは、わずかな初期状態の違いが場の時間変化とともに指数的に拡大されるため、目的の形状に変化させることはほぼ不可能である。従来手法では、この問題に対して、流体制御の方法を適用して解決を試みている。例えば、目的の場に近づけるために、現在の場との差に応じた人工的な外力を直接適用する方法[7]や、加える人工的な外力を最小化するように、最適化問題として定式化して解く方法[5,6]が提案されている。しかし、これら

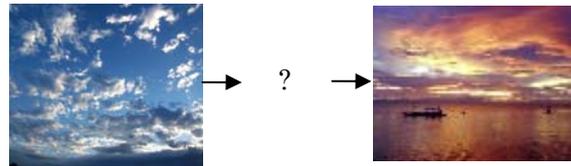


図1 任意の初期状態と目的状態の雲が与えられた場合、それらを補間するアニメーションを作成することが本研究の目的である。

の手法の適用範囲は限定されている。例えば、前者の手法で得られるシミュレーション結果は、しばしば人工的な外力の影響が大きく、“明らかにコントロールされている”という印象を与え、物理的に自然な動きが必要となるアニメーションには向かない[8]。また、後者の手法は高い計算コストのため、実用的な計算時間では、比較的短い時間推移や粗いメッシュしか扱うことができない。そのため、これらの手法では、日中の雲の変化といった長いタイムスパンで、かつ高い解像度が必要とされるシミュレーションを実現することは難しいと考えられる。

本研究では、これらの手法にかわる新たなアプローチとして、順時間シミュレーションと逆時間シミュレーションを組み合わせる方法を目指とする。ただし、本研究は未完成であり、本稿では、逆時間シミュレーションに焦点を当てる。逆時間シミュレーションを用いると、例えば図2に示すように、目的の形状から出発し、場の時間発展をさかのぼって追跡することができる。こうして得られたアニメーションを逆再生することにより、順時間シミュレーションを行った場合と同じような自然なアニメーションを得ることができる。

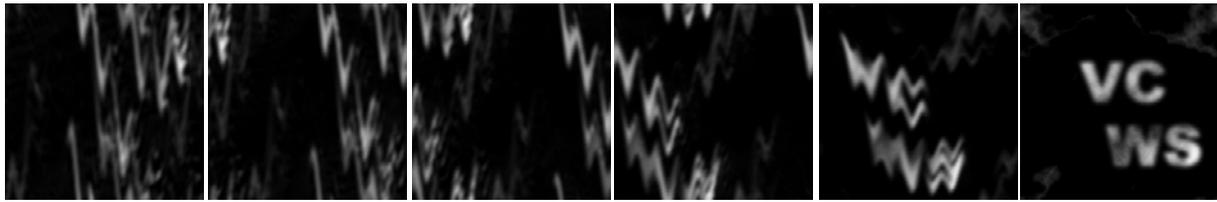


図2 逆時間シミュレーションにより、目的の形状に推移するシミュレーションを行うことができる。

そのため、逆時間シミュレーションは、目的の形状に推移するシミュレーションを得る上で重要な手法であり、その研究意義は高い。しかしながら、CG の分野で知られている流体シミュレーション手法は一般には時間的な適応性がない。そこで、本研究では、非常に高い適応性をもつシミュレータ（可適及的シミュレータとよぶ）を導入する。提案法のシミュレータは、数千タイムステップ経た後の状態からも、初期状態を高い精度で復元でき、かつ順時間シミュレーションと逆時間シミュレーションに同一のアルゴリズムを用いており、最適化問題を解くなどの高い計算コストを必要としない。

本稿では、可適及的シミュレータの構成法を紹介し、煙のような簡単なシミュレーションや雲のアニメーションを例に、その実用性について検討・考察する。

以下では、2節で関連研究を紹介し、3節で可適及的シミュレータの構成法について述べる。4節では、煙のシミュレーションへの応用を示し、次に5節で雲のシミュレーションへの応用を示す。6節に結果を提示し、7にまとめと今後の課題を示す。

2. 関連研究

2.1 流体シミュレーション

物理法則に基づく雲のシミュレーション手法は、Dobashi ら[9]、Miyazaki ら[10]、Harris ら[11]によって提案されており、本研究では、Miyazaki ら[10]の提案した時間発展方程式をベースに本稿で導入する可適及的な離散化を行い、逆時間シミュレーションを行う。

2.2 流体制御

流体制御では、何らかの外的要因（例えば外力）を導入して、初期場から目的場に近づけることを考える。Treuille ら[5] は、場の時間的な発展のステップをステートマシンとみなし、初期場から目的場に至るまでのシミュレーション経路を変数とするような目的関数を最適化することにより、人工的な外力の影響を最小限に抑えたシミュレーション手法を提案した。McNamara ら[6] は、adjoint 法を導入し、Treuille らの手法を高速化した。しかし、これらの手法の計算コストは高く、

実用的には、タイムスパンが短く(数十ステップ)、またメッシュの解像度も粗いシミュレーションしか扱うことができない。このため、日中の雲の変化のような長いタイムスパンかつ高い解像度が要求されるシミュレーションへの応用はきわめて難しい。

Fattal ら[7] は、現在の場と目的場の差に応じた人工的な外力を決定的に導入することによって、場を変化させる方法を導入した。彼らの手法は、Treuille ら[5]の手法や McNamara ら[6]の手法に比べて非常に高速であるが、しばしば人工的な外力の影響が大きく、“明らかにコントロールされている”という印象を与え、物理的に正確で自然なシミュレーション結果を得ることが難しい。

Dobashi ら[8] は、積乱雲の形成シミュレーションにおいて、目的の積乱雲の形状を得る手法を提案した。より一般的な煙や雲のシミュレーションの制御はまだ実現されていない。

2.3 可適及的シミュレーション

計算物理の分野では、エネルギーを保存する流体シミュレーションスキームが複数提案されている。Duponcheel ら[1]は、エネルギー保存を目的とする流体シミュレーションスキームの評価において、可適及性の良さを指標として利用できることを示した。彼らは、速度場の時間的发展を記述した Navier-Stokes 方程式が可適及的であることを示し、適切な離散化スキーム(例えば Morinishi ら[2]の手法)を利用して解くことにより、数千タイムステップ経た後の速度場でも、逆方向にシミュレーションを行うことによって、よい精度で初期状態を復元できることを示した。

煙や雲への応用においては、さらに密度場や温度場などのスカラー場の移流スキームが必要で、かつ可適及的である必要がある。しかし、CG で一般的に利用されている semi-Lagrange スキーム[13]は数値拡散が大きいため可適及的でなく、また計算物理の分野で空間離散化法として広く利用されている WENO スキーム[4]のような風上差分に基づく手法は空間的な対称性が崩れているため、可適及性が悪い。本研究では、高次の中心差分に基づく移流スキームを利用した。

3. 可遡及的シミュレーション

3.1 支配方程式

速度場の時間的发展を記述する Navier-Stokes 方程式は、連続の式と運動量保存式から構成され、

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} - \nabla p + \bar{\mathbf{f}} \end{cases} \quad (1)$$

と表される。ここで、 $\bar{\mathbf{u}}$ は速度場、 t は時刻、 p は圧力場、 $\bar{\mathbf{f}}$ は外力を表す。煙や雲のシミュレーションではさらにスカラー場 ϕ の移流を記述する方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \phi \quad (2)$$

の解法が必要である。以下ではこれらの方程式の可遡及性に関して議論し、離散化の方法について述べる。

3.2 速度場の時間発展方程式

式(1)では、 $(\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t), p(\bar{\mathbf{x}}, t))$ が解ならば、 $(-\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, -t), p(\bar{\mathbf{x}}, -t))$ も解となる。すなわち、初期状態 $(\bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}}, 0), p_0(\bar{\mathbf{x}}, 0))$ から出発し、時刻 t^* において $(\bar{\mathbf{u}}^*(\bar{\mathbf{x}}, t^*), p^*(\bar{\mathbf{x}}, t^*))$ になったならば、速度場を反転させて $(-\bar{\mathbf{u}}^*(\bar{\mathbf{x}}, 0), p^*(\bar{\mathbf{x}}, 0))$ を初期値としてシミュレーションを開始すると、時刻 t^* において $(-\bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}}, t^*), p_0(\bar{\mathbf{x}}, t^*))$ となる。

この性質は、次に示す式変形から確認できる。まず連続の式は、速度の向きを変えても成り立つことが分かる。次に運動量保存式について、 $\bar{\mathbf{u}}$ の代わりに $-\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, -t)$ 、 p の代わりに $p(\bar{\mathbf{x}}, -t)$ を代入すると、

$$\text{(左辺)} = \frac{\partial(-\mathbf{u}(x, -t))}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{u}(x, -t)}{\partial(-t)} \frac{\partial(-t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(x, -t)}{\partial(-t)}$$

$$\text{(右辺)} = -((-\mathbf{u}(x, -t)) \cdot \nabla)(-\mathbf{u}(x, -t)) - \nabla(p(x, -t)) + \mathbf{f} = -(\mathbf{u}(x, -t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x, -t) - \nabla p(x, -t) + \mathbf{f}$$

となり、式(1)と比較すると、 t が $-t$ に置き換わっているだけで、残りは同じ形であることが分かる。つまり、もしシミュレータが可遡及性を持つならば、ある時刻で速度場を反転させてそのままシミュレーションを継続すると、初期状態に復帰することができる。なお、外力項も可遡及性が要求されるが、一般には重力や浮力を適用することができる。

式(1)の可遡及性は、一般には離散化した場合には成り立たないが、離散化の際に以下の三条件に注意するとシミュレータが可遡及性を持つようになる。第一の条件は時間刻みが正確であることである。解が完全に

可遡及的であるためには、陰的なタイムステップング [3] が必須だが、高次の Runge-Kutta でもよい近似を得られる [1]。次に、空間離散化に関する条件について説明する。まず、 $\bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{u}}) = -(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{f}}$ とおき、さらに場とオペレータの空間離散化を添え字 h により記すと、運動量保存式の semi-discrete 形式(空間に関してのみ離散化されている)は、

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \bar{\mathbf{H}}^h(\bar{\mathbf{u}}^h) - \nabla^h p^h \quad (3)$$

となる。タイムステップングが正確である条件の下、式(3)が可遡及的であるためには、

$$\bar{\mathbf{H}}^h(\bar{\mathbf{u}}^h) = \bar{\mathbf{H}}^h(-\bar{\mathbf{u}}^h)$$

を満たす必要がある。この空間離散化の対称性に関する条件が第二の条件となる。最後の条件は、場が安定して推移することで、ある時間で場が発散しないことである。

以上の三条件のうち、第二の条件に関して補足しておく。第二の条件は第一の条件よりも厳しく、空間的な対称性のないスキーム、例えば、風上差分(WENO スキーム [4] など)を用いた場合には可遡及性が悪い。逆に可遡及性の観点だけから言えば、離散化の精度はさほど関係ない (3.3 節参照)。

なお、連続の式は一般に離散的な系のもとでは必ずしも局所的に厳密に満たされているわけではなく、外力がない場合に速度場のエネルギーが保存されるためには、移流項として skew-symmetric 形式を採用し、これに従って離散化する必要がある。移流項の skew-symmetric 形式は連続の式を用いて式変形すると下記で表される。

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_x = \frac{1}{2} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_x}{\partial y} \right)$$

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_y = \frac{1}{2} \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_y}{\partial y} \right)$$

次に、運動量保存式から、 x 方向の速度は

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} = -u_x (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_x - u_x \nabla \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。上式はエネルギー保存についての式であり、連続の式と skew-symmetric 形式を利用して

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_x^2}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\bar{\mathbf{u}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{u}_x \right) - \nabla \cdot \begin{pmatrix} p u_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

と変形できる。式(4)の右辺はダイバージェンスの形式であり、系の空間全体について式(4)を積分し、右辺に

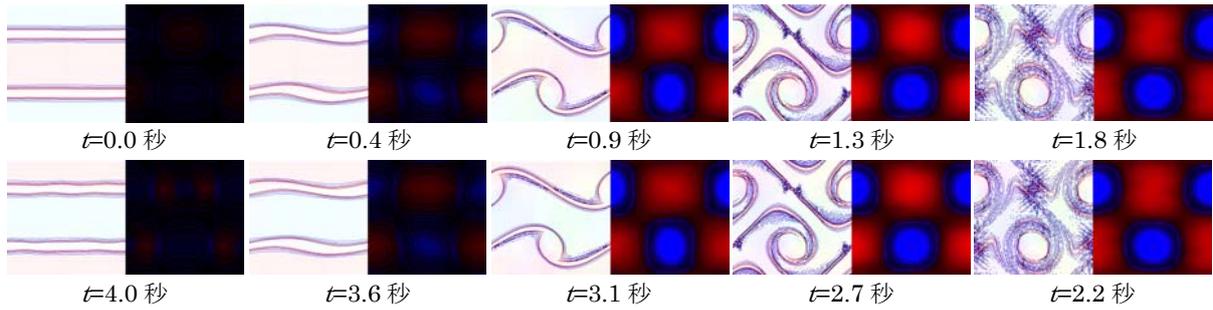


図4 可遡及的シミュレータによって計算した速度場および圧力場の時間発展。時間刻みは0.002秒であり、1000タイムステップ経過して $t=2.0$ 秒になったとき、速度を反転してさらに2秒間シミュレーションを継続した。列の上下は、時刻2.0秒に関して対称的な時間における速度場(左、渦度の等値線をあわせて図示)と圧力場(右、圧力の等値線をあわせて図示)を表している。初期状態 $t=0.0$ 秒と終了状態 $t=4.0$ 秒の差はわずかであり、このシミュレータには高い可遡及性があることがわかる。

ガウスの発散定理を適用すると、系への流入また系からの流出がなければ、式(4)は系全体に関して大域的に保存されることがわかる。 y 方向の速度についても同様の議論が適用できる。

次に空間離散化にふれる前に、本研究で用いるグリッドの構造について説明する。Morinishiら[2]の手法に従って、シミュレーションのグリッドには、MACグリッドを用いる。MACグリッドでは、ベクトル量をセルの面(二次元の場合はエッジ)に格納し、スカラー量はセルの中心に格納する(図3)。

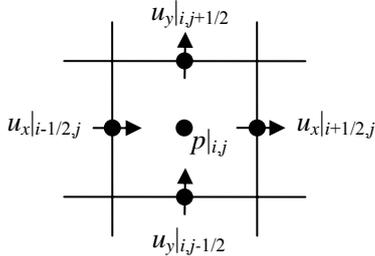


図3 MACグリッド(二次元の場合)

移流項の x 成分の二次精度の離散化は、Morinishiら[2]の手法に従って次のようになる。

$$4(\bar{u} \cdot \nabla)u_x|_{i+\frac{1}{2},j} = (u_x|_{i+\frac{1}{2},j+1})(u_y|_{i+1,j+\frac{1}{2}} + u_y|_{i,j+\frac{1}{2}}) - (u_x|_{i+\frac{1}{2},j-1})(u_y|_{i+1,j-\frac{1}{2}} + u_y|_{i,j-\frac{1}{2}}) + (u_x|_{i+\frac{3}{2},j} + u_x|_{i-\frac{1}{2},j} + u_x|_{i+\frac{1}{2},j})(u_x|_{i+\frac{3}{2},j} - u_x|_{i-\frac{1}{2},j})$$

y 方向の離散化は対称的なので、省略する。速度場の時間発展には、三次のRunge-Kuttaを用いた。時間刻みの三つのsub stepでの処理は次のとおりである。

$$\frac{\bar{u}^{(1)*} - \bar{u}^n}{\Delta t} = \bar{H}(\bar{u}^n) - \nabla p^n + \bar{f}$$

ステップ1:

$$\nabla^2 \varphi^1 = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{u}^{(1)*}$$

$$\frac{\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(1)*}}{\Delta t} = -\nabla \varphi^1$$

$$p^{(1)} = p^n + \varphi^1$$

ここで、二行目では、ポアソン方程式を解いている。

$$\frac{\bar{u}^{(2)*} - \frac{3}{4}\bar{u}^n - \frac{3}{4}\bar{u}^{(1)}}{\Delta t} = \frac{1}{4}(\bar{H}(\bar{u}^{(1)}) - \nabla p^{(1)} + \bar{f})$$

ステップ2:

$$\nabla^2 \varphi^2 = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{u}^{(2)*}$$

$$\frac{\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(2)*}}{\Delta t} = -\nabla \varphi^2$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} + \varphi^2$$

$$\frac{\bar{u}^{n+1*} - \frac{1}{3}\bar{u}^n - \frac{2}{3}\bar{u}^{(2)}}{\Delta t} = \frac{2}{3}(\bar{H}(\bar{u}^{(2)}) - \nabla p^{(2)} + \bar{f})$$

ステップ3:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{u}^{n+1*}$$

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n+1*}}{\Delta t} = -\nabla \varphi$$

$$p^{n+1} = p^{(2)} + \varphi$$

こうして構成したシミュレータが可遡及であることを示すために、double jet flow (文献[12])を用いた簡単な実験を紹介する。Double jet flowとは、シミュレーション領域 $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ 内で、周期境界条件の下、

$$u_x(x, y, 0) = \begin{cases} \tanh[(y - \pi/2)/\delta] & \text{for } y \leq \pi \\ \tanh[(3\pi/2 - y)/\delta] & \text{for } y > \pi \end{cases}$$

$$u_y(x, y, 0) = \varepsilon \sin(x)$$

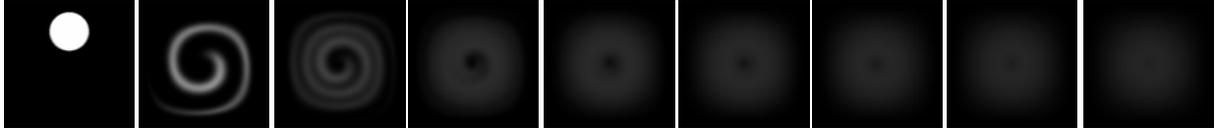
$$p(x, y, 0) = 0$$

で定義される初期速度場(向きの異なる二つの流れがすれ違うような場)からの時間発展により得られる極めて非定常的な流れである。ただし、 $\delta = \pi/15$ 、 $\varepsilon = 0.05$ とする。図4に示した結果から、このシミュレータがよい可遡及性を持つことが分かる。

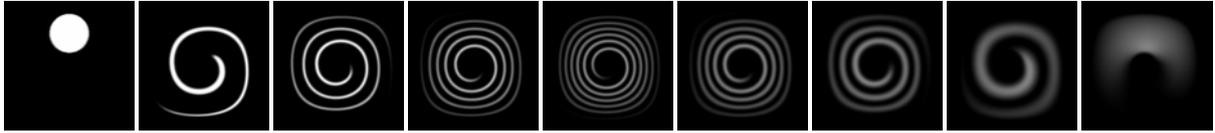
3.3 スカラー場の移流

スカラー場の時間発展方程式(2)は、一見Navier-Stokes方程式よりもシンプルだが、適切な解法を選択が非常に難しい。まず、式(2)が可遡及的である

Semi-Lagrange



5th order WENO



2nd order central



12th order central

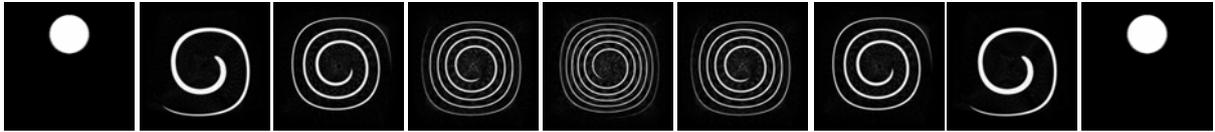


図5 移流スキームの可遡及性テスト。時間刻み 0.002 秒で 8 秒間(4000 ステップ)時間発展させ、速度を反転させた後、さらに 8 秒間時間発展させた結果。Semi-Lagrange スキームは数値拡散が大きく、初期状態に復帰できない。WENO スキームは風上スキームであり、空間離散化の対称性が崩れているため、可遡及性が悪い。二次の中心差分は可遡及的なスキームであるが、余分な振動が現れるというデメリットがある。より高次の中心スキームを利用することで、振動を抑えることができる。

ためには、Navier-Stokes 方程式の場合と同様な議論により、同じ三条件を満たす必要がある。図5に複数の移流スキームによる可遡及性テストの結果をまとめた。CG の分野でよく利用される Semi-Lagrange 法[13]は、激しい数値拡散のため、時間発展とともに場の構造が拡散して失われてしまい可遡及性がない。また、計算力学の分野でよく利用されている WENO スキーム[4]は、Semi-Lagrange 法よりはるかによいが、離散化において空間的な対称性が崩れているため、可遡及性が悪い。一方、二次の中心差分は離散化の三条件を満たしており、可遡及的である。ただし、離散化の精度は悪く、解の振動が目立つ。この問題は、より高次の 12 次の中心差分を利用することで、いくらか抑えることができる。こうした振動が発生する原因は、値の変化が大きな場所の勾配の近似精度にあり、多項式を用いた中心差分による近似では、完全に勾配を表現できず、誤差が振動の形として現れる。本稿の段階では、これに勝るスキームを発見できなかったため、12 次の中心差分を用いた。よりよいスキームの開発が今後の課題となる。なお、一次元の場合の 12 次の中心差分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i \approx -\frac{1}{1260} \phi_{i-5} + \frac{5}{504} \phi_{i-4} - \frac{5}{84} \phi_{i-3} + \frac{5}{21} \phi_{i-2} - \frac{5}{6} \phi_{i-1} + \frac{5}{6} \phi_{i+1} - \frac{5}{21} \phi_{i+2} + \frac{5}{84} \phi_{i+3} - \frac{5}{504} \phi_{i+4} + \frac{1}{1260} \phi_{i+5}$$

で与えられ、このスキームを元に skew-symmetry 形式

を離散化する。

速度場の場合と異なり、スカラー場の移流が難しいのは、速度場の時間発展では移流項が非線形項であり、かつ poisson 方程式によって速度場を補正しているからである。そのため、低次(2次)の中心差分で離散化しても、振動はほとんど発生しない。

4. 煙のシミュレーション

本節では、可遡及的シミュレータの簡単な応用として、3節で示したスキームを組み合わせるにより、煙のシミュレーションを行う。順時間のシミュレーションでは、まず式(1)を時間発展させて速度場を更新し、次に式(2)を時間発展させて煙の密度場を更新する。逆時間シミュレーションを行う場合には、まず速度場を反転させておき、順時間のシミュレーションと同じシミュレータを用いて(Δt は同符号で同じ大きさのまま)、式(2)を時間発展させて煙の密度場を更新したのち、式(1)を時間発展させて速度場を更新する。こうすることでシミュレーションが可遡及的であることは次のように説明できる。

密度場の時間発展のステップでは、速度場は定数とみなせて、密度場の更新の直前と直後では速度場は同じである。したがって、密度場の移流が可遡及的であるならば、密度場の更新後に逆時間シミュレーションを行うと完全に更新前の状態に復元することができる。

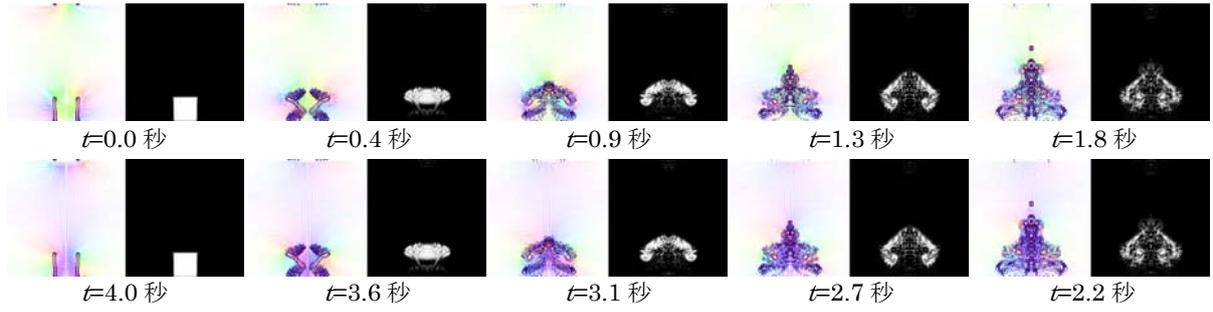


図6 可逆的シミュレータによって計算した煙の時間発展。時間刻みは0.002秒であり、1000タイムステップ経過して $t=2.0$ 秒になったとき、速度を反転してさらに2秒間シミュレーションを継続した。列の上下は、時刻2.0秒に関して対称的な時間における速度場(左,渦度の等値線をあわせて図示)と密度場(右)を図示している。このシミュレータには高い可逆性があることがわかる。

また、速度場の移流が可逆的なら、速度場の更新前の状態に復元できる。したがって、上記のように構成したシミュレータは可逆性をもつ。また、図6に示すシミュレーションの結果から、提案したシミュレータが可逆的であることが実験的に確認できる。

5. 雲のシミュレーション

雲のシミュレーションでは、各グリッドセルの中心に、密度の変わりに温度 T 、水蒸気量 q_v 、水滴量 q_c を格納し、次に示す支配方程式を解く。

まず、速度場の時間発展は、

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla p + \vec{B} \end{cases} \quad (5)$$

と記述される。 \vec{B} は浮力を表し、

$$\vec{B} = \frac{T - T_{amb}}{T_{amb}} \vec{g} - \frac{q_c}{\rho} \vec{g}$$

と定義される。ここで、 ρ は水滴の密度、 \vec{g} は重力を表し、 T_{amb} は場所ごとに定められた環境温度であり、

標高が高くなるとともに低くなるように設定する。水蒸気量、水滴量、温度の時間発展は、

$$\begin{cases} \frac{\partial q_v}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) q_v + C_c \\ \frac{\partial q_c}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) q_c - C_c \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) T - \Gamma u_y - Q C_c \end{cases} \quad (6)$$

と表される。 Γ は水が鉛直方向に移動した場合の断熱温度変化を表す係数であり、 Q は気化熱を表す。 C_c は

水蒸気から水滴への相転移量を表し、

$$C_c = \alpha(\min(q_s(T), q_v + q_c) - q_v) \quad (7)$$

と表される。 α は相転移率を表し、0.1とした。 $q_s(T)$ は飽和水蒸気量を近似する関数であり、

$$q_s(T) = \frac{A}{T} \exp\left(\frac{B(T-273)}{C+T-273}\right)$$

と表される。 A, B, C は定数であり、 $A=2.129, B=17.27, C=237.3$ である。

これらの雲の支配方程式を解くための順時間シミュレータは次のように三ステップから構成される。まず、式(5)に従って速度場の時間発展を3.2節の方法で計算する。次に式(6)のうち、移流項を3.3節の方法で計算する。最後に、式(7)を用いて相転移量を計算し、式(6)の残りの項を計算する。逆時間シミュレータでは、これら三ステップを逆順に実行する。

こうして構成されたシミュレータは、煙のシミュレータとは異なり、厳密には可逆的ではない。その理由は、式(7)によって計算される相転移量が順時間の場合と逆時間の場合とで異なるためである。この点の解決は今後の課題である。

6. 結果

可逆的シミュレータの応用として、本節では目的状態が与えられた場合に、逆時間シミュレーションによって、時間をさかのぼったアニメーションを生成し、これを逆再生する例を考える。

まず、4節で提案した煙のシミュレータを用いて、煙のアニメーション生成を考える。図7に示すように、“VCWS”の形に密度場を初期化しておき、速度場を適当に与え、逆時間シミュレーションを行って逆再生した結果を図7に示した。

つぎに、5節で提案した雲のシミュレータを用いて、雲のアニメーションを作成する。煙の例の場合と同様に、“VCWS”の形に水滴の場を初期化しておき、速度

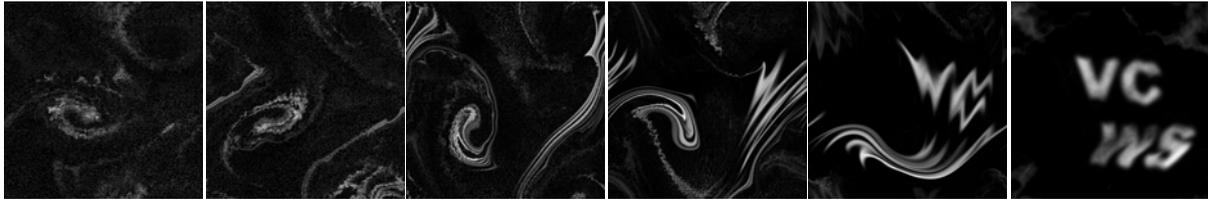


図 7 煙のシミュレーション例

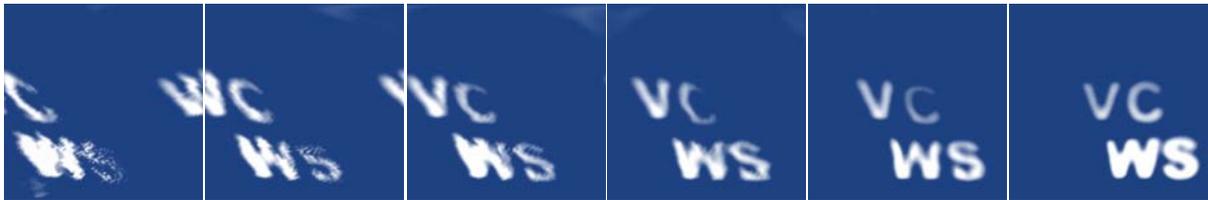


図 8 雲のシミュレーション例

場を適当に与え、逆時間シミュレーションを行って逆再生させた結果を図 8 に示した。

7. まとめと今後の課題

本稿では、流体シミュレーションにおける基本的な方程式である Navier-Stokes 方程式と移流方程式が可逆的であることを示し、適切な離散化によって可逆的なシミュレーションが可能であることを示した。その応用として、目的状態を初期値として速度場を逆転させた状態でシミュレーションを行うことで、逆時間にシミュレーションを行うことができ、さらに得られた結果を逆再生することにより、目的状態に至るアニメーションを作成できる。

離散化のスキームとして、Navier-Stokes 方程式の時間発展には Morinishi ら[2]の手法を用い、移流方程式の時間発展には 12 次の中心差分スキームを用いた。理論的には、かなり長いタイムスパンに渡って、時間をさかのぼったシミュレーションが可能だが、シミュレーションの過程において、場に余分な振動が現れるという問題が残り、CG での利用においては好ましくない。

今後は、よりよい移流スキームの開発と、順次間シミュレーションと逆時間シミュレーションを組み合わせる方法の検討が課題となる。

参考文献

[1] M. Duponcheel, P. Orlandi, G. Winckelmans, “Time-reversibility of the Euler equations as a benchmark for energy conserving schemes,” *Journal of Computational Physics* 227 (2008) pp. 8736-8752

[2] Y. Morinishi, T.S. Lund, O.V. Vasilyev, P. Moin, “Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow,” *Journal of*

Computation Physics 143 (1998) pp. 90-124

- [3] J.J.A.M. Van Os, R.E. Uittenbogaard, “Towards the ultimate variance-conserving convection scheme,” *Journal of Computational Physics* 197 (2004) pp. 197-214
- [4] G. Jiang, C. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes,” *Journal of Computational Physics*, 126 (1996), pp.202-228
- [5] A. Treuille, A. McNamara, Z. Popovic, J. Stam, “Keyframe control of smoke simulations,” *SIGGRAPH '03*, pp.716-723
- [6] A. McNamara, A. Treuille, Z. Popovic, J. Stam, “Fluid control using the adjoint method,” *ACM Transactions on Graphics*, 23 (2004), 3, pp.449-456
- [7] R. Fattal, D. Lischinski, “Target-driven smoke animation,” *ACM Transactions on Graphics*, 23 (2004), 3, pp. 441-448
- [8] Y. Dobashi, K. Kusumoto, T. Nishita, T. Yamamoto, “Feedback control of cumuliform cloud formation based on computational fluid dynamics,” *ACM Transactions on Graphics*, 27 (2008), 3, article 94
- [9] Y. Dobashi, K. Kaneda, H. Yamashita, T. Okita, T. Nishita, “A simple, efficient method for realistic animation of clouds,” *SIGGRAPH 2000*, pp. 19-29
- [10] R. Miyazaki, Y. Dobashi, T. Nishita, “Simulation of cumuliform clouds based on computational fluid dynamics,” *Proc. EuroGraphics 2002 Short Presentations*, 405-410
- [11] M.J. Harris, W.V. Baxter, T. Scheuemann, A. Lastra, “Simulation of cloud dynamics on graphics hardware,” *Proc. Graphics Hardware 2003*, pp. 92-101
- [12] R.Knikker, “Study of a staggered fourth-order

compact scheme for unsteady incompressible viscous flows,” International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2008

[13] J. Stam, “Stable fluids,” SIGGRAPH 99, pp.121-128