

不偏な適合的自由行程サンプリングのための 最適な空間分割に関する考察

楽 詠 灝^{†1} 岩 崎 慶^{†2} 陳 炳 宇^{†3}
土 橋 宜 典^{†4} 西 田 友 是^{†1}

光の散乱効果を考慮した関与媒質の写實的レンダリングは、CG 分野において重要であり、しばしばモンテカルロ法によって計算される。モンテカルロ法による散乱計算では、自由行程サンプリング (連続する散乱イベント間の距離 (自由行程) をサンプリングする方法) が重要な技術である。我々は先行研究において、統計的に不偏かつ適合的な自由行程サンプリング法^{14),15)} を提案し、従来法に比べてサンプリング効率を大きく改善した。その方法の鍵となる概念は、媒質の存在する空間領域を、媒質の平均自由行程の空間分布に基づいて分割し、自由行程を適合的にサンプリングすることである。このため、空間分割のスキームがサンプリングの効率性において重要である。本稿では、我々は理論的にサンプリング効率が最適となる空間分割法を示す。

On Optimal Space Partitioning for Unbiased, Adaptive Free Path Sampling

YONGHAO YUE,^{†1} KEI IWASAKI,^{†2} BING-YU CHEN,^{†3}
YOSHINORI DOBASHI^{†4} and TOMOYUKI NISHITA^{†1}

Photo-realistic rendering of participating media with light scattering in consideration is important in computer graphics, and is typically computed using Monte Carlo based methods. The key technique in such methods is the free path sampling, which is used for determining the distance (free path) between successive scattering events. In our previous work, we proposed an unbiased and adaptive free path sampling method^{14),15)} and the sampling efficiency was significantly improved over existing methods. The key concept of that method is to partition the spatial domain according to the spatial variation of the mean free path of the medium and to sample the free path in an adaptive manner. Thus, the space partitioning scheme is important for the sampling efficiency. In this paper, we show a space partitioning scheme that is theoretically proven to make the sampling efficiency optimal.

1. はじめに

蒸気、水、炎、煙、爆発、火山の噴火、雲、大気、および滝や海などの飛沫は、あちこちに見られる一般的な関与媒質である。こうした関与媒質のレンダリングは、CG 分野において重要であり、しばしば印象的な視覚的效果を与えるため、近年映画産業などにおいて利用される頻度が高まっている。

光の散乱効果は、関与媒質のレンダリングにおいて本質的であり、典型的な計算法はモンテカルロに基づく方法^{7),8),10),12)} である。これらの方法において、連続する散乱イベント間の距離 (自由行程) を決定することは必要不可欠な技術である。この技術は、自由行程サンプリングと呼ばれ、どの手法を用いるかによって、関与媒質のレンダリングの計算効率や計算精度は大きく影響を受ける。

CG 分野では、自由行程サンプリングを行うための方法として、レイマーチングが一般的に利用されてきた。しかし、文献^{12),14),15)} で指摘されているように、レイマーチングによる計算は、計算結果に統計的な偏りがあり、厳密解に収束しない。この統計的な偏りは、レイマーチングにおけるサンプリング間隔に応じて変化し、異なるサンプリング間隔では、結果画像のピクセルの色が異なる。

一方で、統計的に不偏なサンプリング手法として、原子力科学の分野で Woodcock tracking¹³⁾ と呼ばれる方法が提案されている。しかし、Woodcock tracking には、媒質が非均質であるほど効率が悪くなるという問題があることが知られている⁹⁾。この問題を解決するため、我々は先行研究^{14),15)} において、不偏で適合的な自由行程サンプリング手法を提案した。その方法の鍵となる概念は、媒質の存在する空間領域を、媒質の平均自由行程の空間分布に基づいて分割し、自由行程を適合的にサンプリングすることである。その結果、不均質の度合いが高い関与媒質について、Woodcock tracking に比べて一桁から二桁の高速化が実現された。

不偏で適合的な自由行程サンプリング手法では、空間分割の仕方がサンプリングの効率に影響する。我々の先行研究^{14),15)} では、一次元の場合について、事前のサンプリング効率の

^{†1} 東京大学, The University of Tokyo

^{†2} 和歌山大学, Wakayama University

^{†3} 国立台湾大学, National Taiwan University

^{†4} 北海道大学, Hokkaido University

推定に基づいて、最適な空間分割を求める方法を示した。三次元の場合については、ヒューリスティックな解法を用いたが、以下の点で不完全であった: 1) 得られる空間分割を用いたサンプリング効率が最適であるという保証はない, 2) いくつかの場合 (典型的には媒質が均質に近いとき) に, Woodcock tracking よりも効率が悪くなることもある。

本稿では、三次元の場合において、理論的にサンプリング効率が最適となる空間分割スキームを示す。そのようなスキームは、下記の理由で不偏で適切な自由行程サンプリング手法にとって重要である: 1) 最適解を用いることにより、既存のスキームの効率やロバスト性の評価が可能となる, 2) またそのような評価により、新たな空間分割スキームを開発する際に、空間分割を求めるのに要する計算時間とサンプリング効率のトレードオフの評価が可能になる。

2. 関連研究

本節では、自由行程サンプリングの従来法について議論する。関与媒質のレンダリングに関する従来研究は、サーベイ^{4),6)}を参照されたい。

自由行程サンプリングの手法は、次の二つに分類できる: 1) レイマーチングおよびその応用手法^{2),7),10),11)}, 2) Woodcock tracking およびその応用手法^{3),9),13)-15)}。

CG 分野では、レイマーチングが一般的に用いられているが、計算結果には一般的に統計的に偏りがあり、厳密解に収束しない。厳密解と統計的に偏りのある解の差は視覚的に容易にわかるものの、そのような差は前もって見積もることが難しいため、しばしば問題になる。

上記の偏りに起因する問題を解決する方法として、Woodcock tracking¹³⁾が原子力科学の分野で提案されており、Raab ら¹²⁾によって初めて CG 分野に導入された。Woodcock tracking は Coleman ら⁵⁾によって統計的に不偏であることが証明されており、厳密解に収束する。Woodcock tracking の欠点は、非均質の度合いが高い媒質において、計算効率がより悪くなること⁹⁾である。この問題は長らく知られてきたが、近年に至るまで解決法は存在しなかった。Badal ら¹⁾は、GPU 実装を利用することにより Woodcock tracking を高速化した。Leppänen⁹⁾は、手動で密度の濃い領域と薄い領域を分けて別々に扱うことにより、サンプリングの効率を改善した。我々の先行研究^{14),15)}では、kd-木を用いた空間分割の考え方を導入し、この空間分割に基づいた、統計的に不偏で適切な自由行程サンプリング法を開発することによって、Woodcock tracking の欠点を解決した。空間分割の方法として、我々はヒューリスティックなアプローチを用いた自動的な分割方法を提案した。しかし、サンプリングの効率が最適になる保証はないために不完全であり、どのようにすれば最適な空

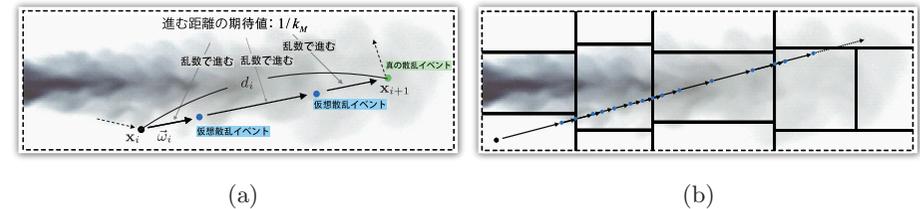


図 1 (a): Woodcock tracking の概念図. (b): 提案法の概念図.

間分割を求めることができるか、という問題を残した。

本稿では、不偏で適切な自由行程サンプリングにおいて、サンプリング効率を最適にするための空間分割の求め方について議論を行う。

3. 自由行程サンプリング

本節では、自由行程サンプリングについて説明し、次に Woodcock tracking¹³⁾と我々の先行研究^{14),15)}を概説する。

モンテカルロベースのレンダリング法において光路を生成する際には、連続する散乱イベントを順次生成していく。図 1(a) に示すように、散乱イベント i がすでに生成されているとき、新たな散乱イベント $(i+1)$ を生成するには、自由行程 d_i および散乱方向 ω_i を確率的にサンプリングする。散乱方向のサンプリングには、一般的な重点的サンプリング手法を用いることができる。自由行程のサンプリングでは、 d_i を下記の確率密度分布に従ってサンプリングする¹⁰⁾。

$$pdf_{fp}(\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + d_i \vec{\omega}_i) = e^{-\tau(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})} k(\mathbf{x}_{i+1}) \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{x}_i と \mathbf{x}_{i+1} は i 番目と $(i+1)$ 番目の散乱イベントの位置、 k は消散係数、 $\tau(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$ は、 \mathbf{x}_i と \mathbf{x}_{i+1} 間の光学的深さを表す。

Woodcock tracking は、棄却サンプリング法により自由行程をサンプリングする。事前に *majorant* 消散係数 k_M を求めておく。*majorant* 消散係数 k_M は空間を代表するような消散係数であり、媒質中の消散係数よりも小さくない値であればどんな値でもよく、通常は消散係数の最大値を用いる。サンプリング時は、媒質を消散係数が k_M である一様媒質とみなして、仮想散乱イベントを生成する。図 1(a) に示すように、新たな仮想散乱イベントを生成するには、乱数を用いて、自由行程 d_i を $-\ln(1 - rand()) / k_M$ だけ進める。なお、このときに増加する自由行程の期待値は $1/k_M$ である。不偏性を保障するためには、こうした仮想散

乱イベントを確率 $k(x_i + d_i \bar{\omega}_i)/k_M$ でのみ、真の散乱イベントとして採用する。

Woodcock tracking が、より不均質の度合いが高い媒質で、よりサンプリング効率が悪化する理由は次の通りである。不均質な度合いの高い媒質では、消散係数 $k(x_i + d_i \bar{\omega}_i)$ は通常 majorant 消散係数 k_M よりも小さく、真の散乱イベントとして採用する確率 $k(x_i + d_i \bar{\omega}_i)/k_M$ は、媒質が薄い領域で小さくなる。したがって、仮想散乱イベントの生成は、真の散乱イベントが起こるまでに何度も繰り返されてしまう。

我々の先行研究^{14),15)}では、媒質の存在する空間領域を図 1(b) に示すように複数の部分空間に分割し、異なる部分空間において、異なる majorant 消散係数を用いた。各 majorant 消散係数を各部分空間内の最大消散係数に設定することにより、Woodcock tracking の場合よりも、1) 仮想散乱イベントが生成される際に、媒質が薄い部分空間において、自由行程が増加される距離 $1/k_M$ が長くなり、2) 真の散乱イベントとして採用する確率 $k(x_i + d_i \bar{\omega}_i)/k_M$ が高くなる。これらによって、真の散乱イベントが起こるまでの、仮想散乱イベントの生成回数は劇的に低減され、効率化につながる。統計的な普遍性は、異なる部分空間をまたぐ際に、自由行程を部分空間の間の境界まで‘後戻り’する、という操作によって保証される。この後戻りの計算コストは、仮想散乱イベントを一回余分に生成するコストにほぼ相当する。

4. 最適なサンプリング効率のための空間分割

我々は、空間分割を階層的にトップダウン方式で再帰的に行う。すなわち、まず親の領域を分割した後、子の領域を分割する。また、空間分割を kd-木を用いて表現する。

分割の各ステップでは、1) 対象領域を分割するかどうか、2) どのように分割すれば最適になるか、の二点を決定する必要がある。これらの決定は、対象領域内のあらゆる部分空間について探索し、各部分空間の周り（一次元なら区間の端点、三次元なら平面）で分割することによって、反復回数（仮想散乱イベントの生成回数）の期待値がどのように変化するかを調べることによって判定する。

本節では、まず一次元の場合の最適な空間分割の定式化を考える。一次元の場合の結果は先行研究^{14),15)}と同じであるが、導出の過程が若干改良されている。次に、一次元の場合の導出法を三次元に拡張して、三次元の場合の最適な空間分割の定式化を考える。

4.1 一次元の場合の最適な空間分割

任意の位置 x での消散係数を $k(x)$ とする。区間 $(s, t]$ を考え、 $(s, t]$ の majorant 消散係数を

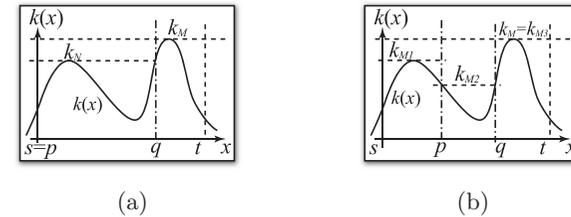


図 2 一次元の消散係数の分布および区間の例。(a): ケース I: $(p, q]$ が $(s, t]$ に接する場合。(b): ケース II: $(p, q]$ が厳密に $(s, t]$ に含まれる場合。

k_M とする。また、区間 $(s, t]$ に含まれる部分区間 $(p, q]$ を考える。すなわち、 $(p, q] \subseteq (s, t]^*$ である。 $(p, q]$ の端で $(s, t]$ を分割した場合と、 $(s, t]$ を分割しない場合とにおいて、 $(s, t]$ を光線が通過するのに要する反復回数の期待値がどのように変化するかを考える。このとき、 $(s, t]$ と $(p, q]$ の位置関係により、図 2 に示すように、ケース I: $(p, q]$ が $(s, t]$ に接する、すなわち、 $p = s$ または $q = t$ である場合と、ケース II: $(p, q]$ が厳密に $(s, t]$ に含まれる場合、の二つの場合に分けられる。

まず、ケース I(図 2(a)) を考える。 $(p, q]$ の majorant 消散係数を k_N とする。分割を行わない場合、 $(s, t]$ の majorant 消散係数は k_M なので、一反復で自由行程が進む距離の期待値は $1/k_M$ であり、 $(p, q]$ を通過するのに要する反復回数の期待値は $(q-p) \cdot k_M$ である。一方、分割を行う場合、 $(p, q]$ の majorant 消散係数は k_N なので、 $(p, q]$ を通過するのに要する反復回数の期待値は $(q-p) \cdot k_N$ となる。このため、分割を行うことにより、 $(p, q]$ を通過するのに要する反復回数の期待値は、 $(q-p) \cdot (k_M - k_N)$ だけ減少する。続いて、 $(s, t]$ を光線が通過するのに要する反復回数の期待値の減少を考える。 $(p, q]$ 以外の領域での反復回数の期待値は双方で共通であり、また分割を行った場合には、‘後戻り’の処理によって、一回余分に反復回数が増えるので、反復回数の期待値の減少 R_{iter} は、 $(q-p) \cdot (k_M - k_N) - 1$ となる。

次に、ケース II(図 2(b)) を考える。 $(p, q]$ の両端で分割すると、 $(s, t]$ は、1) $I_1 = (s, p]$ 、2) $I_2 = (p, q]$ 、3) $I_3 = (q, t]$ の三つの区間に分割される。これらの区間における majorant 消散係数をそれぞれ、 K_{M1} 、 K_{M2} 、 k_{M3} とする（これらのうち、少なくとも一つは k_M に等しい）。 $(s, t]$ を光線が通過するのに要する反復回数の期待値を考えると、後戻りの操作により二回余分に反復回数が増えるため、分割を行った場合の反復回数の期待値の減少 R_{iter} は、 $\sum_{j=1}^3 (k_M - k_{Mj}) \cdot |I_j| - 2$ となる。ただし、 $|I_j|$ は区間 I_j の長さを表す。

*1 $(p, q]$ は $(s, t]$ に含まれるが、 $(s, t]$ とは等しくない。

上記の二つのケースは, $R_{iter}(I') = A(I') - T(I')$ という形に統合して定式化できる. ここで, $I' \subsetneq (s, t]$ である. $A(I')$ はケース I の場合には $A(I') = (k_M - k_N) \cdot (q - p)$ であり, ケース II の場合には $A(I') = \sum_{i=1}^3 (k_M - k_{Mi}) \cdot |I_i|$ を表す. また, $T(I')$ はケース I の場合には $T(I') = 1$ であり, ケース II の場合には $T(I') = 2$ である.

最適な空間分割を求めるには, R_{iter} を最大化する部分区間 I を探す. すなわち,

$$I = \operatorname{argmax}_{I' \subsetneq (s, t]} R_{iter}(I') \quad (2)$$

である. もし, $R_{iter}(I) > 0$ ならば, 分割によって反復回数の期待値を減少できる. $R_{iter}(I) \leq 0$ ならば, 分割によって反復回数の期待値を減少できないので, $(s, t]$ は分割しない.

上記の議論は, 反復回数の期待値の評価に基づいていた. この議論は次のようにして計算時間の評価に拡張できる. t_{iter} を仮想的な散乱イベントを一回生成するのに要する計算時間, t_{rewind} を後戻りの処理を一回行うのに要する計算時間とする. 分割を行った場合に, $(s, t]$ を通過するのに要する計算時間の減少 R_{time} は

$$R_{time}(I') = t_{iter} \cdot A(I') - t_{rewind} \cdot T(I') \quad (3)$$

と表すことができる.

kd-木を構築するには, ケース I の場合には, 適切な $(p, q]$ の端で, $(s, t]$ を分割する. ケース II の場合には, $(p, q]$ の両端のうち, まず $(s, t]$ の中央 $c = (s + t)/2$ に近いほうで分割し, 次にもう一方で分割する. このようにすることで, よりバランスされた kd-木を構築することができる.

上記の手順を分割された各領域に対して, 再帰的に適用することにより, 最適な空間分割を得ることができる.

4.2 三次元の場合の最適な空間分割

三次元の場合, 区間に替わり, 三次元の (軸平行な面で囲まれた直方体状の) ボリューム領域 E を考える. また, E を通過するあらゆる光線の空間 $\Gamma(E)$ を考える. E の部分空間 E' を考え, E' によって E を分割した場合と分割しない場合とで, E を通過する各光線について反復回数の期待値を求め, それらの光線についての平均を考える. ここで, E' によって E を分割するとは, 複数の長方形の有限な大きさの平面 P_k を用いて E を二分しながら分割し, 最終的に E' を得るような分割を意味する. これは, kd-木を用いて空間分割を表現することに基づく. 以下ではこうした長方形の有限な大きさの平面 P_k を単に分割平面 P_k と呼ぶ. 分割の回数を最小にするには, 各 P_k は E' のどれかの面を含むように選ぶ. E' が E

に厳密に含まれている場合, E' には六つの面があるので, $k = 1, \dots, 6$ となる. ただし, 分割平面を選ぶ順序は一意ではないが, その取り扱いは後述する.

まず, 分割を行わない場合の, 反復回数の期待値の全光線についての平均値 \bar{N} を, 下記のように定式化する.

$$\bar{N} = \int_{\Gamma(E)} k_M l(r) dr / \int_{\Gamma(E)} dr \quad (4)$$

ここで, k_M は E の majorant 消散係数, $l(r)$ は光線 r が E を通過する距離を表す.

次に, 分割を行う場合には, 1) 各分割された空間を通過するのに要する反復回数と 2) 分割平面を通過する際の後戻りの処理に要する回数とを別々に考慮する. まず, P_k によって分割された E の複数の部分空間を E_j とすると, 1) は,

$$\sum_j \int_{\Gamma(E_j)} k_{M, E_j} l(r) dr / \int_{\Gamma(E)} dr \quad (5)$$

と定式化できる. ここで, k_{M, E_j} は, E_j の majorant 消散係数を表す. 次に, 2) は,

$$\sum_k \int_{\Gamma(P_k)} 1 \cdot dr / \int_{\Gamma(E)} dr \quad (6)$$

と定式化できる. ここで, $\Gamma(P_k)$ は, P_k を通過する全光線の空間を表し, 数字の 1 は分割平面を通過する際に行う一回の後戻り処理を表す. したがって, 分割を行った場合の, 反復回数の期待値の全光線についての平均値 \bar{N}_{part} は,

$$\bar{N}_{part} = \sum_j \int_{\Gamma(E_j)} k_{M, E_j} l(r) dr / \int_{\Gamma(E)} dr + \sum_k \int_{\Gamma(P_k)} 1 \cdot dr / \int_{\Gamma(E)} dr \quad (7)$$

と表せる.

4.1 節の R_{iter} は, $R_{iter} = \bar{N} - \bar{N}_{part}$ であり, 三次元の場合は下記の形式に拡張される.

$$\begin{aligned} R_{iter}(E') &= \sum_j \int_{\Gamma(E_j)} (k_M - k_{M, E_j}) l(r) dr / \int_{\Gamma(E)} dr - \sum_k \int_{\Gamma(P_k)} 1 \cdot dr / \int_{\Gamma(E)} dr \\ &= A(E') - T(E') \end{aligned} \quad (8)$$

上記の定式化に現れる積分は, 通常正確に評価することが難しいと考えられるが, 我々は, 下記の二つの仮定の下では, 解析的に求まることを発見した. 1) 光線は無遠から入射し,

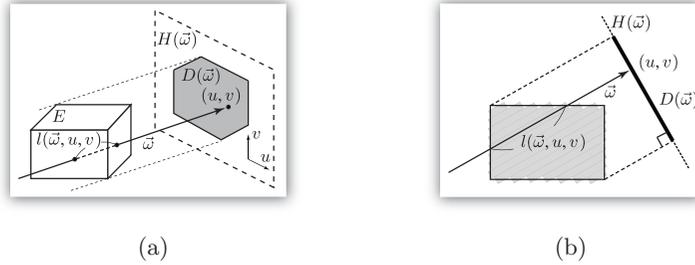


図 3 (a): ボリューム領域 \$E\$ と、方向 \$\vec{\omega}\$ への投影例. (b): (a) を \$H(\vec{\omega})\$ に垂直な視点から見た場合.

無限遠へ射出する、2) 光線は空間内において一様に分布する。以下、解析解を導出する。

まず、 $\int_{\Gamma(E)} k_M l(r) dr$ の計算法を考える。一度に全方位の光線を考える代わりに、方向ごとに計算すると、

$$\int_{\Gamma(E)} k_M l(r) dr = \int_{S^2} k_M \left(\iint_{D(\vec{\omega})} l(\vec{\omega}, u, v) dudv \right) d\omega \quad (9)$$

と書ける。ここで、 S^2 は全球方向、 $d\omega$ は方向 \$\vec{\omega}\$ に対応する微小立体角を表す。また、図 3(a) に示すように、 $D(\vec{\omega})$ は、 E を方向 \$\vec{\omega}\$ に垂直な平面 \$H(\vec{\omega})\$ へ平行投影した領域、 u と v は $H(\vec{\omega})$ 内の直交する二軸の座標を表す。さらに、 $l(\vec{\omega}, u, v) = l(r)$ は、 $H(\vec{\omega})$ 上の点 (u, v) を通る方向 \$\vec{\omega}\$ の直線の、 E によって切り取られる長さである。\$|E|\$ によって E の体積を表すと、方向 \$\vec{\omega}\$ によらずに、

$$\iint_{D(\vec{\omega})} l(\vec{\omega}, u, v) dudv = |E| \quad (10)$$

が成り立つ。なぜならば、 $l(\vec{\omega}, u, v) dudv$ は図 3(b) に示すように、 E を \$\vec{\omega}\$ 方向にスライスした微小な柱状に相当し、それらを積分したものは、 E の体積になるからである。これより、

$$\int_{\Gamma(E)} k_M l(r) dr = 4\pi k_M |E| \quad (11)$$

が得られる。

次に、 $\int_{\Gamma(E)} dr$ について、同様に方向ごとに計算すると、

$$\int_{\Gamma(E)} dr = \int_{S^2} \left(\iint_{D(\vec{\omega})} dudv \right) d\omega = \int_{S^2} |D(\vec{\omega})| d\omega \quad (12)$$

と書ける。ただし、 $|D(\vec{\omega})|$ は、 $D(\vec{\omega})$ の面積を表し、次に示すように計算できる。\$x, y, z\$ 軸の単位ベクトルをそれぞれ \$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\$ と表し、 E の \$x, y, z\$ に垂直な面の面積をそれぞれ

S_x, S_y, S_z とおけば、

$$|D(\vec{\omega})| = S_x \vec{e}_x \cdot \vec{\omega} + S_y \vec{e}_y \cdot \vec{\omega} + S_z \vec{e}_z \cdot \vec{\omega} \quad (13)$$

と表せる。また、方向 \$\vec{\omega}\$ の成分を $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ と表し、 θ, ϕ によって $\omega_x = \sin \theta \cos \phi$, $\omega_y = \cos \theta$, $\omega_z = \sin \theta \sin \phi$ と表し、8 つの象限ごとに計算すると、

$$\begin{aligned} \int_{S^2} |D(\vec{\omega})| d\omega &= 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (S_x \sin \theta \cos \phi + S_y \cos \theta + S_z \sin \theta \sin \phi) \sin \theta d\phi d\theta \\ &= 2\pi(S_x + S_y + S_z) = \pi S(E) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ただし、 $S(E)$ は、 E の表面積を表す。

最後に、分割平面 P を通過する場合の計算 $\int_{\Gamma(P)} 1 \cdot dr$ についても、やはり方向ごとに計算すると、

$$\int_{\Gamma(P)} 1 \cdot dr = \int_{S^2} \left(\iint_{P_{\perp}(\vec{\omega})} dudv \right) d\omega = \int_{S^2} |P_{\perp}(\vec{\omega})| d\omega \quad (15)$$

と書ける。ここで、 $P_{\perp}(\vec{\omega})$ は、 P を方向 \$\vec{\omega}\$ に垂直な平面へ投影した領域を表し、 $|P_{\perp}(\vec{\omega})|$ はその面積を表す。同様に \$\vec{\omega}\$ を \$\theta, \phi\$ を用いて展開して計算すると、 P が \$x, y, z\$ のどの軸に垂直かによらずに、

$$\int_{S^2} |P_{\perp}(\vec{\omega})| d\omega = 2\pi |P| \quad (16)$$

となる。ただし、 $|P|$ は、 P の面積を表す。

以上をまとめると、反復回数の期待値の全光線についての平均を考えたとき、分割による減少 R_{iter} は、

$$R_{iter} = \sum_j 4(k_M - k_{M,E_j}) |E_j| / S(E) - \sum_k 2|P_k| / S(E) \quad (17)$$

と表せ、また計算時間の減少 R_{time} については、

$$R_{time} = t_{iter} \cdot \sum_j 4(k_M - k_{M,E_j}) |E_j| / S(E) - t_{rewind} \cdot \sum_k 2|P_k| / S(E) \quad (18)$$

と表せる。上記定式化にはユーザ指定のパラメータは一切なく、厳密に計算できる。

上記の議論に基づいた空間分割のスキームは下記の通りである。まず、 E に含まれる部分空間 E' をすべて列挙する。各 E' について、 E' の周りでの分割方法をすべて列挙する。このような分割方法は、 E' の面を含むような平面で、 E を順次二分しながら構成できるが、平面を選ぶ順序に応じて、一般的には 429 通り考えられる。各分割方法の下では、一般に分割平面の面積の合計は異なり、また分割された各部分空間における majorant 消散係数 k_{M,E_j}

も異なるので、式 (17) あるいは式 (18) はその都度評価する。すべての E' とすべての分割方法のうちで、 R_{iter} あるいは R_{time} が最大のものを探し、 R_{iter} あるいは R_{time} が正ならば、その分割方法を用いて E を分割する。そうでなければ、 E は分割しない。

5. ディスカッション

本節では、本稿で述べた手法の利用法について述べる。4節で述べた空間分割を求める方法は、全探索を用いた方法であり、計算のコストが非常に高いので、実用的な解像度の媒質に対する空間分割を求めるという用途には向かない。しかし、次に示すように、既存の空間分割スキームによるサンプリング効率を評価するのに役立てることができる。我々は、 8^3 や 16^3 の解像度のランダムに生成した媒質に対して、まず、1) 先行研究の方法と 2) 本稿の方法で空間分割を計算した。次に、ランダムに 10^6 本の光線を生成し、散乱イベントが起こるまでに要した反復回数を測定し全光線についての平均を計算した。その結果、先行研究の方法で得られる空間分割を用いたサンプリング効率に比べて、本稿の方法で得た空間分割を用いたサンプリング効率は、平均的に 3.3%よく、最大で 23.4%よいという結果となった。

6. おわりに

本稿では、三次元の場合において、理論的にサンプリング効率が最適となる空間分割スキームのための定式化を示した。また 1) 光線は無遠から入射し、無限遠へ射出する、2) 光線は空間内において一様に分布する、という二つの仮定の下で、解析的に計算できることを示した。さらに、本稿で示したスキームを利用して、先行研究^{14),15)}の方法を用いた場合のサンプリングの効率について評価を行った。今後の課題として、次に示すことが考えられる。まず、上記の二つの仮定を緩和した場合においても、解析解が存在するかどうかについて調べたい。次に、本稿で述べた解法と先行研究の方法との間には、空間分割の計算時間と、得られた空間分割を用いたサンプリングの効率とのトレードオフに関して、一連の手法のクラスが存在すると考えられるので、どのような手法が可能かを検討していきたい。

参 考 文 献

- 1) Badal, A. and Badano, A.: Accelerating Monte Carlo simulations of photon transport in a voxelized geometry using a massively parallel graphics processing unit, *Medical Physics*, Vol.36, No.11, pp.4878–4880 (2009).
- 2) Brown, F.B. and Martin, W.R.: Direct Sampling of Monte Carlo Flight Paths in Media with Continuously Varying Cross-sections, *Proc. ANS Mathematics &*

- Computation Topical Meeting* (2003).
- 3) Carter, L., Cashwell, E. and W.M.Taylor: Monte Carlo Sampling with Continuously Varying Cross Sections along Flight Paths, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.48, pp.403–411 (1972).
- 4) Cerezo, E., Pérez, F., Pueyo, X., Serón, F.J. and Sillion, F.X.: A survey on participating media rendering techniques, *The Visual Computer*, Vol.21, No.5, pp.303–328 (2005).
- 5) Coleman, W.: Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.32, pp.76–81 (1968).
- 6) Gutierrez, D., Jensen, H.W., Jarosz, W. and Donner, C.: Scattering, *SIGGRAPH ASIA Courses* (2009).
- 7) Jensen, H.W. and Christensen, P.H.: Efficient simulation of light transport in scenes with participating media using photon maps, *Proc. SIGGRAPH 98*, ACM, pp.311–320 (1998).
- 8) Lafortune, E.P. and Willems, Y.D.: Rendering participating media with bidirectional path tracing, *Proc. EGWR 96*, pp.91–100 (1996).
- 9) Leppänen, J.: Development of a New Monte Carlo Reactor Physics Code, PhD Thesis, Helsinki University of Technology (2007).
- 10) Pauly, M., Kollig, T. and Keller, A.: Metropolis Light Transport for Participating Media, *Proc. EGWR 2000*, pp.11–22 (2000).
- 11) Perlin, K. and Hoffert, E.M.: Hypertexture, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH 89)*, Vol.23, ACM, pp.253–262 (1989).
- 12) Raab, M., Seibert, D. and Keller, A.: Unbiased global illumination with participating media, *Proc. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006*, pp.591–605 (2006).
- 13) Woodcock, E., Murphy, T., Hemmings, P. and Longworth, T.: Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry, *Proc. Conference on the Application of Computing Methods to Reactor Problems, ANL-7050*, pp.557–579 (1965).
- 14) Yue, Y., Iwasaki, K., Chen, B.-Y., Dobashi, Y. and Nishita, T.: Unbiased, Adaptive Stochastic Sampling for Rendering Inhomogeneous Participating Media, *ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH Asia 2010)*, Vol.29, No.5 (2010), Article 177.
- 15) Yue, Y., 岩崎 慶, 陳 炳宇, 土橋宜典, 西田友是: 非均質関与媒質のレンダリングのための不偏で効率的な重点的サンプリング手法, *Visual Computing / グラフィクスとCAD 合同シンポジウム 2010* (2010). 論文番号 1.