Chapter 0 Introduction

数學符號

1. **N**: 自然數集
2. **Z**: 正整數集
3. **Q**: 有理數集
4. **R**: 實數集
5. **C**: 複數集

6. $$\begin{cases} \mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbf{R} \right\} \\ \mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbf{R} \right\} \\ \mathbf{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\} \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \operatorname{span}\{\mathbf{u}\} & = \{c\mathbf{u} \mid c \in \mathbf{R}\} \\ \operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} & = \{c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \mid c, d \in \mathbf{R}\} \\ \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} & = \{c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}\} \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{V} = \{\mathbf{a} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}, & \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{U} + \mathbf{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{U},\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}, & \mathbf{U}, \mathbf{V} \subset \mathbf{R}^n \end{cases}$$

線性代數

No.
Date: / /

- 向量空間 $\mathbb{R}^n$, 運算 $u+v$, cu, $u\cdot v$

(A) $\mathbb{R}^n$ 的 向量子空間 (平直物件), dim = ? (線性獨立/相依, 基底, 維數)

(1) 參數式: $x_0 + \mathrm{Span}(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \{x_0 + c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}$

(2) 方程式: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 或 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

(B) 線性變換: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T(au+bv) = aT(u) + bT(v)$

(平直變換) $x \longmapsto y = Ax$

$\updownarrow$

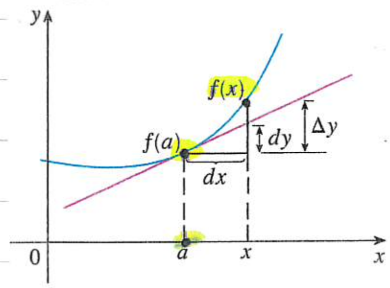
矩陣 $A_{m\times n}$: $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

- 數學工具: 向量, 矩陣, 高斯消去法 (解線性聯立方程式)

重點: (1) 理論: 抽象定義, 數學証明, 物理幾何意義。
(2) 計算:
(3) 應用: 機器學習, 量子計算, ...

- 丘成桐: 一切高級數學, 歸根結底都是微積分和線性代數的各種變化。

- 微積分 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$



- 函數 $f: x \longmapsto y$

$\uparrow$ approximate, around a. (以直代曲)

- 線性變換 $df: dx \longmapsto dy = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n} dx$
(最接近 f)

- Example

(1) $(n = m = 1)$

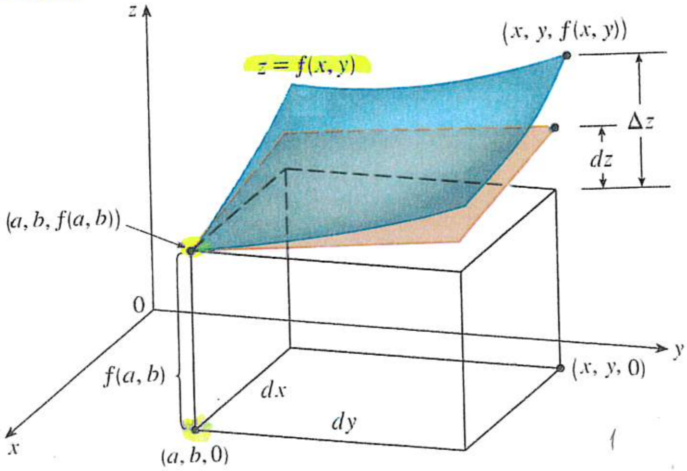
$f(x) - f(a) \doteqdot f'(a)(x-a)$

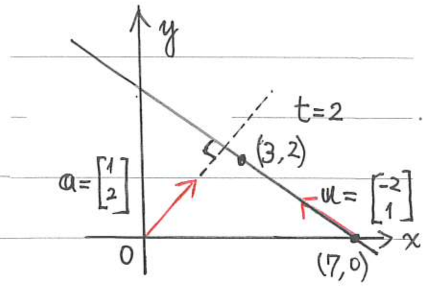
$\Delta y \doteqdot dy = \frac{df}{dx}(a)\, dx$

(2) $(n = 2, m = 1)$

$f(x,y) - f(a,b) \doteqdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

$\Delta z \doteqdot dz = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$





- **Example 1** $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

直線:
(1) 參數式: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\dfrac{x-7}{-2} = \dfrac{y}{1} = t$, 方向向量 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) 方程式: $x + 2y = 7$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

法向量 $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

或 $= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Example 2** $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

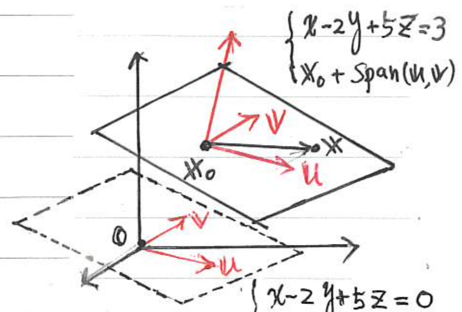
(a) 直線:
(1) 參數式: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

(2) 方程式: $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-z \\ -1+z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) 平面:
(1) 參數式: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$

(2) 方程式: $x - 2y + 5z = 3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2y-5z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

法向量 $= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$



- **Example 3** $\mathbb{R}^5$

(1) 方程式:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + 7x_5 = 0 \quad \cdots (*) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 參數式:
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_5 \\ -x_3 - 2x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = s\,u_1 + t\,u_2, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

dim = 2
3個方程式限制,自由度 = 2
方程式 (*) redundant